الجبر والمقابلة

لمحمد بن موسى الخوارزمي

الدكتور محمد مرسي أحمد

أستاذ الرياضة السابق بجامعة القاهرة

محمد بن موسى الخوارزمي

جاء فى كتاب الفهرست لابن النديم (الذى تم تأليفه سنة ٩٨٧ ميلادية) طبعة القاهرة :

« الخوارزمى واسمه محمد بن موسى ، وأصله من خوارزم ، وكان منقطعا إلى خزانة الحكمة للمأمون ، وهو من أصحاب علوم الهيئة ، وكان الناس قبل الرصد وبعده يعولون على زيجيه الأول والثانى ويعرفان بالسند هند وله من الكتب ، كتاب التاريخ نسختين أولى وثانية ، وكتاب الرخامة ، وكتاب العمل بالاسطرلاب ..... » .

ولا نعلم على وجه التحقيق تاريخ ولادة الخوارزمى ولا تاريخ وفاته ، إلا أن ماورد فى كتاب فهرست ابن النديم عن انقطاع الخوارزمى إلى مكتبة المأمون الذى حكم من سنة ٨١٣ إلى سنة ٨٣٣ بعد الميلاد ، يدلنا على عصر اشتغال المأمون بالعلم والأدب ، ويعزز كلام ابن النديم ما هو وارد فى كتاب الجبر والمقابلة من إشارة إلى المأمون حيث قال :

« وقد شجعنى ما فضل الله به المأمون أمير المؤمنين مع الخلافة التى حاز له إرثها وأكرمه بلباسها وحلاه بزينتها من الرغبة فى الأدب وتقريب أهله وإدنائهم وبسط كنفه لهم ومعونته إياهم على إيضاح ما كان مشتبها ، وتسهيل ما كان مستوعرا ، على أن ألفت من كتاب الجبر والمقابلة كتابًا مختصرًا حاصرًا للطيف الحساب وجليله ، لما يلزم الناس من الحاجة اليه » فهذه العبارة وما ورد فى كتاب ابن النديم تدل دلالة واضحة على معاصرة الخوارزمى للمأمون وتمكننا من تحديد حياة الخوارزمى تحديدا إجماليا وإن

لم تمكنا من تحديد تاريخ ولادته وتاريخ وفاته على وجه التحقيق . ولعله من المناسب هنا أن نشير إلى خطأ وقعنا فيه فى الطبعات الأولى لكتاب الجبر والمقابلة الذى ساهمت فيه مع أستاذنا الجليل المغفور له الدكتور على مصطفى مشرفة ، ذلك أننا نقلنا عن سوتر المستشرق الألمانى أن محمد بن موسى الخوارزمى كان أحد أبناء بنى موسى الذين كلفهم المأمون بقياس درجة من درجات محيط الكرة الأرضية ، والصحيح أن بنى موسى هؤلاء كانوا غير محمد بن موسى الخوارزمى وكان أبوهم منقطعا إلى مكتبة المأمون فى زمن الخوارزمى ذاته ، وقد صحح ذلك فى الطبعة الأخيرة من الكتاب المذكور .

ولم تقتصر شهرة الخوارزمى عند علماء العرب الذين تابعوا أعماله بالشرح والتعليق ، وإنما ذاع صيته وامتد أثره إلى بلاد الإفرنج فقد صار اسمه كلمة دخلت أغلب معاجم اللغة الإنجليزية فمثلا تستخدم كلمة الجورزم التى هى ولا شك تحريف لاسم الخوارزمى للدلالة على الطريقة الوضعية فى حل المسائل . كما أن الشاعر الإنجليزى تشوسر يستخدم كلمة أوجرم للدلالة على الصفر ، ذلك لأن طريقة الحساب الهندية بما فى ذلك استخدام الصفر إنما وصلت إلى الغرب عن طريق كتاب الخوارزمى فى الحساب . كما أن اسم علم الجبر فى جميع لغات العالم هو الكلمة العربية التى استخدمها الخوارزمى اسما لكتابه . كما أن الأعداد من الواحد إلى العشرة كانت تعرف فى اللاتينية اسم الجورزمس . كما أن الكلمة الأسبانية التى معناها الأرقام أو الأعداد هى جوارزمو .

نشأة علم الجبر :

علم الجبر ـ شأنه فى ذلك شأن كل العلوم والمعارف ـ لم ينشأ علما مكتملا وإنما ظهر فى معارف الحضارات القديمة على هيئة مسائل متفرقة هندسية أو حسابية استخدمت فى حلها رموز ، ولم يعرف لهذا النوع من الحساب اسم خاص حتى جاء محمد بن موسى الخوارزمى فوضع قواعد هذا العلم وأعطاه اسمه وسنرى فيما بعد كيف اختير اسم هذا العلم من طريقة حل مسائله كما وصفها الخوارزمى .

وأقدم كتاب مدرسى وصل إلى أيدينا هو بردى أحميس الذى يرجع إلى سنة ١٧٠٠ قبل الميلاد وقد قام بهذا البردى وترجمته إلى اللغة الألمانية أيزنلور وطبع

بليبتزج عام ١٨٧٧ ، كما قام بنشر صور لهذا البردى ولس بدج وطبع بلندن عام ١٨٩٨ بعد الميلاد .

وفى بردى أحميس نجد معادلة الدرجة الأولى ذات المجهول الواحد على الصورةا س = ب كما نجد للكمية المجهولة رمزا خاصا كالحال اليوم فى علم الجبر وكما نجد ما يدل على استخدام المعادلات الآنية الخطية .

وبعد ذلك التاريخ ولكن قبل العصر الذهبى للحضارة الإغريقية نجد معادلات الدرجة الثانية فى الآثار المصرية كما نجد مسائل تحتاج فى حلها إلى معادلتين آنيتين إحداهما أو كلاهما من الدرجة الثانية وفى المثال الآتى المأخوذ مز مؤلف للعالم المستشرق كانتور (مطبوع بليبتزج عام ١٩٠٧ بعد الميلاد) نجد مسألة تحتاج فى حلها إلى معادلات الدرجة الثانية .

إذا طلب منك أن تقسم ١٠٠ ذراع مربع بين مربعين بحيث يكون ضلع أحد المربعين ثلاثة أرباع ضلع المربع الآخر فأوجد كلا من المجهولين ـ ويلى ذلك حل المسألة بافتراض أن ضلع أحد المربعين الوحدة وأن ضلع الآخر هو $\frac{٣}{٤}$ الوحدة وبذلك يكون مجموع المساحتين $\frac{٢٥}{١٦}$ الذى جذره $\frac{٥}{٤}$ وجذر المائة ١٠ فتكون نسبة ١٠ إلى طول الضلع المطلوب كنسبة $\frac{٥}{٤}$ إلى ١ ومنه يكون ضلع أحد المربعين ٨ والآخر ٦

والمقابل الجبرى لهذا الحل الهندسى هو بداهة

$$س^{٢} + ص^{٢} = ١٠٠$$
$$س = \frac{٣}{٤} ص$$

ومما تجدر الإشارة إليه أن علامة الجذر التربيعى قد استخدمت فى حل هذه المعادلة وأمثالها . وتؤدى هذه المسألة إلى العلاقة العددية $٦^{٢} + ٨^{٢} = ١٠٠$ التى تتصل اتصالا مباشرا بالعلاقة الأبسط $٣^{٢} + ٤^{٢} = ٢٥$ وتظهر هذه العلاقة فى حل مسائل أخرى من هذا النوع . ومما لا شك فيه أن المصريين القدماء كانوا يعلمون صحة النظرية المنسوبة إلى فيثاغورس والتى تقول إن المربع المنشأ على الوتر فى المثلث القائم الزاوية يساوى مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين .

وقد وضع البابليون القدماء جداول للمربعات والمكعبات ولا تزال هذه الجداول محفوظة فى صحف سنكرة المشهورة وهى صحف معاصرة لبردى أحميس . ويقول كانتور إن العبرانيين القدماء كانوا يعرفون العلاقة (٣ ، ٤ ، ٥) للمثلث القائم الزاوية كما أن رياضى الصين كانت لهم دراية أيضا بهذه العلاقة وبحل مسائل المربعات .

ويعتبر فى حكم المقرر الآن أن رياضى الإغريق كانوا يعلمون الحل الهندسى لمعادلات الدرجة الثانية فى عصر فيثاغورس . وفى كتب إقليدس ذاته مسائل تؤول إلى حلول هندسية لمعادلات الدرجة الثانية ، ومن ذلك عملية قسمة مستقيم إلى جزأين بحيث تكون مساحة المستطيل المكون من المستقيم وأحد الجزأين مساوية للمربع المنشأ على الجزء الآخر .

ولعل أول حل تحليلى لمعادلة الدرجة الثانية نستطيع أن نجزم به يرجع إلى هيرون الذى عاش فى الإسكندرية بعد مولد المسيح بقليل . ففى أحد مؤلفات هيرون المسمى متريكا والمنشور فى ليبتزج عام ١٩٠٣ نجد نصا على أنه إذا علم مجموع جزأى مستقيم وحاصل ضربهما علم كل من الجزأين . كذلك اشتغل ديوفانيوس الذى عاش فى الإسكندرية فى القرن الثالث الميلادى ـ اشتغل بحل معادلة الدرجة الثانية وظهرت فى نفس الوقت محاولات فى الهند .

ومع أن مسائل هندسية وحسابية ظهرت فى الحضارات القديمة فى مصر وبابل ، فى الهند والصين ، واليونان ، إلا أن كلا من هذه البلاد قد تأثر بما يجرى فى البلاد الأخرى ، وكل هذا يعتبر مقدمة لنشوء علم الجبر بمعناه الصحيح ـ كما تدل هذه المحاولات على أن نشوء هذا العلم لم يكن مجهودا صناعيا وتمرينا عقليا بل كان نتيجة طبيعية لاهتمام القوم بمسائل الهندسة وخواص الأعداد .

كتاب الجبر والمقابلة

افتتح محمد بن موسى الخوارزمى كتابه فى الجبر والمقابلة بحمد الله على نعمه والصلاة على نبيه محمد ﷺ ثم قال : ولم تزل العلماء فى الأزمنة الخالية والأمم الماضية يكتبون الكتب مما يصنفون من صنوف العلم ووجوه الحكمة نظرا لمن بعدهم واحتسابا للأجر بقدر الطاقة ، ورجاء أن يلحقهم من أجر ذلك وذخره وذكره ويبقى

لهم من لسان الصدق ما يصغر فى جنبه كثير مما كانوا يتكلفونه من المؤونة ، ويحملونه على أنفسهم من المشقة فى كشف أسرار العلم وغامضه ، إما رجل سبق إلى ما لم يكن مستخرجا قبله فورثه من بعده . وإما رجل شرح مما أبقى الأولون ما كان مستغلقا فأوضح طريقه وسهل مسلكه وقرب مأخذه ، وإما رجل وجد فى بعض الكتب خللا فلمَّ شَعْثَهُ وأقام أوده وأحسن الظن بصاحبه غير راد عليه ولا مفتخر بذلك من فعل نفسه . وقد شجعنى ما فضل الله به الإمام المأمون أمير المؤمنين مع الخلافة التى حاز له إرثها وأكرمه بلباسها وحلاه بزينتها ، من الرغبة فى الأدب وتقريب أهله وإدنائهم وبسط كنفه لهم ومعونته إياهم على إيضاح ما كان مستبهما وتسهيل ما كان مستوعرا . على أن ألفت من كتاب الجبر والمقابلة كتابا مختصرا حاويا للطيف الحساب وجليله لما يلزم الناس من الحاجة إليه فى مواريثهم ووصاياهم وفى مقاسمتهم وأحكامهم وتجاراتهم ، وفى جميع ما يتعاملون به بينهم من مساحة الأرضين وكرى الأنهار والهندسة وغير ذلك من وجوهه وفنونه ، مقدما لحسن النية فيه وراجيا لأن ينزله أهل الأدب بفضل ما استودعوا من نعم الله تعالى وجليل آلائه وجميل بلائه عندهم منزلته ، وبالله توفيقى فى هذا وفى غيره عليه توكلت وهو رب العرش العظيم .

ثم صار الخوارزمى إلى التعريف بمصطلحات العلم الذى يبحثه قائلا : «وإنى لما نظرت فيما يحتاج إليه الناس من الحساب وجدت جميع ذلك عددا ووجدت جميع الأعداد إنما تركبت من الواحد ، والواحد داخل فى جميع الأعداد . ووجدت جميع ما يلفظ به من الأعداد ما جاوز الواحد إلى العشرة يخرج مخرج الواحد ثم تثنى العشرة وتثلث كما فعل بالواحد فتكون منها العشرون والثلاثون إلى تمام المائة ثم تثنى المائة وتثلث كما فعل بالواحد وبالعشرة إلى الألف ثم كذلك تردد الألف عند كل عقد إلى غاية المدرك من العدد .

ووجدت الأعداد التى نحتاج إليها فى علم الجبر والمقابلة على ثلاثة ضروب وهى جذور وأموال وعدد مفرد لا ينسب إلى جذر ولا إلى مال :

فالجذر منها كل شىء مضروب فى نفسه من الواحد وما فوقه من الأعداد وما دونه من الكسور ، والمال كل ما اجتمع من الجذر المضروب فى نفسه ، والعدد المفرد كل ملفوظ به من العدد بلا نسبة إلى جذر ولا إلى مال .

ولما كان الخوارزمي إزاء البحث في معادلات الدرجة الثانية فقد بين الحدود الثلاثة التي تدخل في تركيب هذه المعادلة ، فالجذر أو الشيء كما كان يسميه الخوارزمي هو ما يرمز له عادة بالرمز س . والمال ما اجتمع من ضرب الجذر في نفسه $س^2$ ثم الحد الخالي من س وقد بدأ الخوارزمي بذكر المعادلات التي تحتوي حدين اثنين فقط وبين أنها ثلاثة أشكال .

أموال تعدل جذورا ، وأموال تعدل عددا ، وجذور تعدل عددًاوبين بالمثال حل كل نوع من هذه الأنواع فقال مثلا :

«فأما الأموال التي تعدل الجذور فمثل قولك مال يعدل خمسة أجذاره ($س^2 = ٥ س$) فجذر المال خمسة والمال خمسة وعشرون وهو خمسة أجذاره . وهكذا سار في تبيان الحلول والأمثلة لهذه المعادلات ذات الحدين الإثنين فقط ثم يمضي الخوارزمي بعد ذلك إلى تبيان المعادلات ذات الحدود الثلاثة فيقول «ووجدت هذه الضروب الثلاثة التي هي الجذور والأموال والعدد تقترن فيكون منها ثلاثة أجناس مقترنة وهي :

أموال وجذور تعدل عددا
وأموال وعدد تعدل جذورا
وجذور وعدد تعدل أموالا

ولما كان كلام الخوارزمي مقصورا على الأعداد الموجبة فقط دون السالبة فقد اقتضى ذلك تقسيم معادلة الدرجة الثانية ذات الثلاثة الحدود إلى تلك الأنواع الثلاثة وهي حسب الاصطلاح الحديث

$$ا س^2 + ب س = حـ$$
$$ا س^2 + حـ = ب س$$
$$ب س + حـ = ا س^2$$

وفي بيان طريقة الحل لكل نوع يقول الخوارزمي :

فأما الأموال والجذور التي تعدل العدد فمثل قولك مال وعشرة أجذاره يعدل تسعة وثلاثين درهما. ومعناه أي مال إذا زدت عليه مثل عشرة أجذاره بلغ ذلك كله تسعة

وثلاثين . فبابُه أن تنصف الأجذار وهى فى هذه المسألة خمسة فتضربها فى مثلها فتكون خمسة وعشرين فتزيدها على التسعة والثلاثين فتكون أربعة وستين فتأخذ جذرها وهو ثمانية فتنقص منه نصف الأجذار وهو خمسة فيبقى ثلاثة وهو جذر المال الذى تريد والمال تسعة . وكذلك لو ذكر مالين أو ثلاثة أو أقل أو أكثر فأردده إلى مال واحد وأردد ما كان معه من الأجذار والعدد إلى مثل ماردد‌ت إليه المال .

وبقليل من النظر نرى أن هذه هى طريقة إكمال المربع فى حل معادلات الدرجة الثانية لأنه إذا كانت المعادلة هى :

س^{٢} + ١٠ س = ٣٩

كان (س + ٥)^{٢} = ٣٩ + ٢٥ = ٦٤

وأدى ذلك إلى الحل س = ٣

وهذا ما قال به الخوارزمى .

وبعد أن بين على هذه الصورة طريقة حل كل نوع من الأنواع الثلاثة رسم لكل نوع صورة تبين كيف أنه أكمل المربع فى حل كل واحدة من هذه الأنواع . ثم انتهى من هذا بأن قال ووجدنا كل ما يعمل به من حساب الجبر والمقابلة لا بد أن يخرجك إلى أحد الأبواب الستة التى وصفت فى كتابى هذا وقد أتيت على تفسيرها فأعرف هذا . ثم انتقل الخوارزمى إلى الكلام عن القواعد الأصلية فى حسابه الجديد . يقول وأنا مخبرك كيف تضرب الأشياء وهى الجذور بعضها فى بعض إذا كانت منفردة أو كان معها عدد أو كان مستثنى منها عدد أو كانت مستثناة من عدد . وكيف تجمع بعضها إلى بعض وكيف تنقص بعضها من بعض . إعلم أنه لا بد لكل عدد يضرب فى عدد من أن يضاعف أحد العددين بقدر ما فى الآخر من الآحاد فإذا كانت عقودا ومعها آحاد أو مستثنى منها آحاد فلابد من ضربها أربع مرات : العقود فى العقود . والعقود فى الآحاد . والآحاد فى العقود . والآحاد فى الآحاد . فإذا كانت الآحاد التى مع العقود زائدة جميعا فالضرب الرابع زائد . وإذا كانت ناقصة جميعا فالضرب الرابع زائد أيضا . وإذا كان أحدها ناقصا والآخر زائدا فالضرب الرابع ناقصا . ثم يضرب الخوارزمى الكثير من الأمثلة على تطبيق هذه القاعدة .

وأخذ الخوارزمى يسوق المثال تلو المثال على تطبيقات القواعد التى بينها وأنواع المعادلات التى شرحها ، ولما كان قد قسم معادلات الدرجة الثانية إلى ست أقسام فقد ساق الأمثلة على هذه الأنواع الستة وبين طريقة حلها قال : فالأولى من الست نحو قولك عشرة قسمتها قسمين فضربت أحد القسمين فى الآخر ثم ضربت أحدهما فى نفسه فصار المضروب فى نفسه مثل أحد القسمين فى الآخر أربع مرات . فقياسه أن تجعل أحد القسمين شيئا والآخر عشرة إلا شيئا فتضرب شيئا فى عشرة إلا شيئا فتكون عشرة أشياء إلا مالا ثم تضربه فى أربعة لقولك أربع مرات فتكون أربعة أمثال المضروب من أحد القسمين والآخر فيكون ذلك أربعين شيئا إلا أربعة أموال ، ثم تضرب شيئا فى شىء وهو أحد القسمين فى نفسه فيكون مالا يعدل أربعين شيئا إلا أربعة أموال . فاجبرها بالأربعة الأموال وزده على المال فيكون أربعين شيئا تعدل خمسة أموال ، فالمال الواحد يعدل ثمانية أجذار وهو أربعة وستون وجذرها ثمانية وهو أحد القسمين المضروب فى نفسه والباقى من عشرة إثنان وهو القسم الآخر ، فقد أخرجتك هذه المسألة إلى أحد الأبواب الستة وهى أموال تعدل جذورًا فاعلم ذلك .

وقوله أربعين شيئا إلا أربعة أموال تعدل مالاً فاجبرها بالأربعة الأموال وزدها على المال هو أصل كلمة الجبر عند الخوارزمى والتى أصبحت اسما لهذا النوع من الحساب فى كافة لغات العالم . وسنرى فى مثال آخر كيف استخدم كلمة المقابلة وعن معناها عند الخوارزمى يقول :

عشرة قسمتها قسمين ثم ضربت كل قسم فى نفسه وجمعتهما فكانا ثمانية وخمسين درهما قياسه أن تجعل أحد القسمين شيئا والآخر عشرة إلا شيئا فاضرب عشرة إلا مالا فى مثلها فتكون مائة ومالا إلا عشرين شيئا ثم تضرب شيئا فى شىء فيكون مالا ثم تجمعها فيكون ذلك مائة ومالين إلا عشرين شيئا تعدل ثمانية وخمسين درهما .

$$١٠٠ + ٢ \text{ س}^{٢} - ٢٠ \text{ س} = ٥٨$$

فاجبر المائة والمالين بالعشرين شيئا الناقصة وزدها على الثمانية والخمسين فيكون مائة ومالين تعدل ثمانية وخمسين درهما وعشرين شيئا فاردد ذلك إلى مال واحد وهو أن

تأخذ نصف مامعك فيكون خمسين درهما ومالا تعدل تسعة وعشرين درهما وعشرة أشياء .

$$٥٠ + س^{٢} = ٢٩ + ١٠ س$$

فقابل به وذلك بأن نلق من الخمسين تسعة وعشرين فيبقى واحد وعشرون ومال تعدل عشرة أشياء

$$٢١ + س^{٢} = ١٠ س$$

فنصف الأجذار يكون خمسة واضربها فى مثلها فتكون خمسة وعشرين فالق منها الواحد والعشرين التى مع المال فتبقى أربعة فخذ جذرها وهو اثنان فانقصه من نصف الآجذار التى هى خمسة يبقى ثلاثة وهو أحد القسمين والآخر سبعة فقد أخرجتك هذه المسألة إلى أحد الأبواب الستة وهى أموال وعدد تعدل جذورا .

ونلاحظ أمرين الأول أن الخوارزمى يرد الأموال إلى مال واحد بمعنى أنه يجعل معامل $س^{٢}$ فى معادلاته مساويًا للواحد الصحيح قبل تطبيق قانون المال المربع . والثانى أنه يجبر الناقص بما يساويه ويزيده على الطرف الآخر حتى لا يتعامل مع الحدود السالبة .

وثمة ملاحظة غاية فى الأهمية ذلك أن الخوارزمى حين يأخذ نصف الأجذار ويضربها فى مثلها ثم يلقيها من العدد المفرد إن زادت هذه على هذا العدد المطلق خرج الباقى سالبًا ولا يستطيع أن تخرج جذره ، وقد أسمى مثل هذه المعادلة بالمعادلة المستحيلة وقد بقى هذا اسمها إلى القرن السابع عشر الميلادى حين صار تعميم العدد ليشمل الأعداد التخيلية والمركبة وأصبح لكل معادلة من الدرجة الثانية حلان سواء أكانا حقيقين أم تخيلين

المعامــلات

يقول الخوارزمى اعلم أن معاملات الناس كلها فمن البيع والشرى والصرف والإجارة وغير ذلك على وجهين بأربعة أعداد يلفظ بها السائل وهى المسعر والسعر والثمن والمثمن . فالعدد الذى هو المسعر مباين للعدد الذى هو الثمن . والعدد الذى هو

السعر مباين للعدد الذى هو المثمن . وهذه الأعداد الأربعة ثلاثة منها أبدا ظاهرة معلومة وواحد منها مجهول ، وهو الذى فى قول القائل كم وعنه يسأل السائل . والقياس فى ذلك أن تنظر إلى الثلاثة الأعداد الظاهرة فلا بد أن يكون منها اثنان كل واحد منهما مباين لصاحبه فتضرب العددين الظاهرين المتباينين كل واحد منهما فى صاحبه فما بلغ فاقسمه على العدد الآخر الظاهر الذى متباينه مجهول فما خرج لك فهو العدد المجهول الذى يسأل عنه السائل وهو مباين للعدد الذى قسمت عليه ويصوغ هذه القاعدة شعرا فيقول :

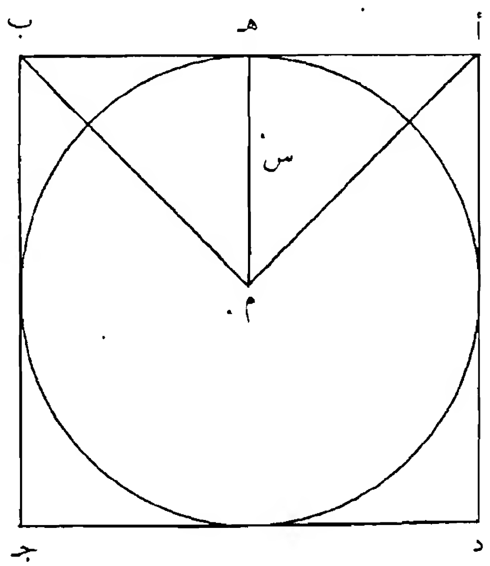
ان رمت بيعا أو شراء لما يكال فى العادة أو يتزن
فاقسم على الأوسط فى كم لنا واقسم على الأول فى كم ثمن

ومثال ذلك فى وجه منه إذا قيل لك عشرة بستة كم بأربعة فقوله عشرة هو العدد المسعر وقوله بستة هو السعر وقوله كم هو العدد المجهول المثمن وقوله بأربعة هو العدد الذى هو الثمن فالعدد المسعر الذى هو عشرة مباين للعدد الذى هو الثمن الذى هو أربعة فاضرب العشرة فى الأربعة وهما المتباينان الظاهران فيكون أربعين فاقسمها على العدد الآخر الظاهر الذى هو السعر وهو ستة فيكون ستة وثلثين وهو العدد المجهول الذى فى قول القائل كم وهو المثمن ومباينه الستة الذى هو السعر .

المساحة

ثم ينتقل الخوارزمى بعد ذلك إلى المساحة فيقول اعلم أن معنى واحد فى واحد إنما هى مساحة ومعناه ذراع فى ذراع فكل شكل متساوى الزوايا والأضلاع يكون من كل جانب واحد فإن السطح كله واحد فإن كان من كل جانب اثنان وهو متساوى الأضلاع والزوايا فالسطح كله أربعة أمثال السطح الذى هو ذراع فى ذراع وكذلك ثلاثة فى ثلاثة وما زاد على ذلك أو نقص وكذلك نصف فى نصف بربع وغير ذلك من الكسور فعلى هذا ... وكل مثلث متساوى الأضلاع فإن ضربك عموده ونصف القاعدة التى يقع عليها العمود هو تكسير (مساحة) ذلك المثلث وكل معينة متساوية الأضلاع فإن ضربك أحد القطرين فى نصف الآخر هو تكسيرها (مساحتها) وكل مدورة (دائرة) فإن ضربك القطر فى ثلاثة وسبع هو الدور الذى يحيط بها وهو

اصطلاح بين الناس من غير اضطرار . ولأهل الهندسة قولان آخران : أحدهما أن تضرب القطر فى مثله ثم فى عشرة ثم تأخذ جذر ما اجتمع فما كان فهو الدور . والقول الثانى لأهل النجوم منهم وهو أن تضرب القطر فى اثنين وستين ألفا وثمانمائة واثنين وثلاثين ثم تقسم ذلك على عشرين ألفا فما خرج فهو الدور وكل ذلك قريب بعضه من بعض والدور (المحيط) إذا قسمته على ثلاثة وسبع يخرج القطر وكل مدورة فإن نصف القطر فى نصف الدور (المحيط) هو التكسير لأنه كل ذات أضلاع وزوايا متساوية من المثلثات والمربعات والمخمسات وما فوق ذلك فإن ضربك نصف ما يحيط بها فى نصف قطر أوسع دائرة يقع فيها تكسيرها (مساحتها) . ونبين نحن ذلك بالقول إن مساحة كل ذات أضلاع وزوايا متساوية تساوى حاصل ضرب نصف محيط ذلك المضلع فى نصف قطر أوسع دائرة تمس أضلاعه من الداخل خذ مثلا المربع هكذا :



فإذا كان ضلع المثلث ٢ س فإن نصف قطر أوسع دائرة داخلة وهى التى تمس أضلاعه من الداخل هى س أو نصف طول ضلع المربع ويكون حاصل ضرب نصف ما يحيط بالمربع وهو ٤ س فى نصف قطر الدائرة وهو س يكون ما اجتمع من هذا ٤ س^{2} وهو مساحة المربع . ويكون ما جاء به الخوارزمى لبيان مساحة الدائرة

مأخوذا على قياس مساحة المضلعات المنتظمة اثباتًا طريفًا وسهلاً لحساب مساحة الدائرة بضرب نصف محيطها فى نصف قطرها .

ونرى من ذلك أن الخوارزمى ذكر ثلاث تقريبات للنسبة ط بين محيط الدائرة وقطرها وهى الجذر التربيعى للعدد ١٠ وثلاثة وسبع ، ٣.١٤١٦ ثم قال بعد ذلك إن أقربها للحقيقة هو الثالث وهو ما كان يستعمله أهل النجوم (علماء الفلك) كما أن أبعدها عن الصواب هو الجذر التربيعى للعدد عشرة ، وكل ذلك تقريب لا تحقيق ولا يقف أحد على حقيقة ذلك ولا يعلم دورها إلا الله لأن الخط ليس بمستقيم فيوقف على حقيقته وإنما قيل ذلك تقريب كما قيل فى جذر الأصم إنه تقريب لا تحقيق لأن جذره لا يعلمه إلا الله ، وأحسن ما فى هذه الأقوال أن نضرب القطر فى ثلاثة وسبع لأنه أخف وأسرع والله أعلم .

وانتهى الخوارزمى من كتابه فى الجبر والمقابلة بعد أن أتبعه بكتاب الوصايا وفيه تطبيق للقواعد والعمليات التى شرح .

ولعلنا قد قدمنا بعضا مما قام به محمد بن موسى الخوارزمى فى إرساء قواعد علم الجبر وحل مسائله فى لغة ميسورة ومنطق سليم وتواضع اختص به أهل العلم الواثقون من علمهم غير مفتخرين على غيرهم بما أتاهم الله من فضله .